Recasages possibles : 150, 151, 152, 158
Référence : Algèbre et Géométrie, ROMBALDI (p. 729-732).

Développement On suppose que E est un espace euclidien et on fixe $u \in \mathcal{L}(E)$.

Lemme 1 L'endomorphisme u admet toujours un sous-espace vectoriel P de E de dimension 1 ou 2 qui est stable.

Lemme 2 Si u est normal, et si $F \leqslant E$ est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Lemme 3 Supposons $\dim(E) = 2$, et u normal. Si u a une valeur propre réelle, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée. Sinon, dans toute base $\mathcal{B}$ orthonormée, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec } b \neq 0.$$

Théorème 4 Si u est normal, alors il existe $p, s \in \mathbb{N}$, $D_p \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R})$, $a_1, b_1, \ldots, a_r, b_r \in \mathbb{R}$, et une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E tels que $b_1, \ldots, b_r \neq 0$, et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & & (0) \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R_r \end{pmatrix} \quad \text{où } R_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$$

- *Preuve du Lemme 1* : Si u a une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la droite engendrée par un vecteur propre associée est stable (et de dimension 1, c'est une droite !). On suppose donc que u n'admet pas de valeur propre réelle. Alors, nécessairement $n \geqslant 2$ et μ_u se décompose dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles de degré 2. En particulier, il existe $b, c \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\mu_u(X) = (X^2 + bX + c)Q(X)$ avec $b^2 - 4c < 0$. Or, μ_u étant le polynôme minimal de u, on a $Q(u) \neq 0$. Ainsi, il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $Q(u)(x) \neq 0$. Puisque $0 = \mu_u(u) = (u^2 + bu + c\mathrm{id}_E) \circ Q(u)$, on voit que $Q(u)(x) \in \mathrm{Ker}(u^2 + bu + c\mathrm{id}_E)$. Notant $y = Q(u)(x)$, on $u^2(y) = -bu(y) - cy$. En posant $P = \mathrm{Vect}\big(y, u(y)\big)$, on voit que $\dim(P) = 2$ (car y n'est pas un vecteur propre par hypothèse) et que P est stable par u. En effet, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $u\big(\lambda y + \mu u(y)\big) = -cy + (\lambda - b\mu)u(y) \in P$. Ceci conclut la preuve du **Lemme 1**.

- *Preuve du Lemme 2* : Supposons u normal et soit $F \leqslant E$ stable par u. On fixe $\mathcal{B}$ une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$. Alors, les matrices de u et de u^* dans $\mathcal{B}$ sont respectivement de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^\top = \begin{pmatrix} A_1^\top & 0 \\ A_2^\top & A_3^\top \end{pmatrix}.$$

On revoit par ailleurs dans cette écriture que $F^\perp$ est stable par u^*. Comme u est normal, on a $AA^\top = A^\top A$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} A_1A_1^\top + A_2A_2^\top & A_2A_3^\top \\ A_3A_2^\top & A_3A_3^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^\top A_1 & A_1^\top A_2 \\ A_2^\top A_1 & A_2^\top A_2 + A_3^\top A_3 \end{pmatrix}$$

En particulier, $A_1A_1^\top + A_2A_2^\top = A_1^\top A_1$. En prenant la trace, puisque $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, on obtient $\mathrm{Tr}(A_2A_2^\top) = 0$, ce qui implique $A_2 = 0$ car $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB^\top)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ (c'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{p^2}$). Ainsi, $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ et on voit que $F^\perp$ est stable par u. Ceci achève la preuve du **Lemme 2**.

- *Preuve du Lemme 3* : Si u admet une valeur propre $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, alors il existe un vecteur e_1 de norme 1 tel que $u(e_1) = \lambda_1 e_1$. Or, $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u d'après le **Lemme 2** et comme $\dim(E) = 2$, $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est une droite, donc il existe $e_2 \perp e_1$ de norme 1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $u(e_2) = \lambda_2 e_2$. La matrice de u dans la base orthonormée (e_1, e_2) est donc diagonale : c'est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Supposons désormais que u n'admet pas de valeur propre réelle. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée quelconque de E et soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Comme u est normal, on a $AA^\top = A^\top A$ donc

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

En particulier $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$ donc $b = \pm c$. Si $b = c$ alors A est symétrique réelle, donc a ses valeurs propres réelles d'après le théorème spectral, ce qui contredit l'hypothèse que u n'admet aucune valeur propre réelle. Ainsi, $b = -c \neq 0$. De plus, $(*)$ donne $ab + cd = ac + bd$, *i.e* $a(b - c) + d(c - b) = 0$, ou encore $(a - d)(b - c) = 0$. Comme $b - c = 2b \neq 0$, on a $a = d$. Finalement, $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ avec $c \neq 0$ comme voulu, ce qui termine la preuve du **Lemme 3**.

- *Preuve du Théorème 4* : Montrons le théorème par récurrence sur $n \geqslant 1$ pour tout espace euclidien de dimension n et tout endomorphisme u de E normal.
  - Pour $n = 1$, c'est immédiat, et pour $n = 2$, c'est le **Lemme 3**.
  - Soit $n \geqslant 3$. Supposons le théorème vrai pour tout espace euclidien de dimension $p \in \{n-2, n-1\}$. Soit E un espace euclidien de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. D'après le **Lemme 1**, il existe $P_1 \leqslant E$ stable par u de dimension 1 ou 2. En fait, on a vu dans la preuve du **Lemme 1** que si u admet une valeur propre réelle, alors on peut choisir P_1 de dimension 1, mais sinon, P_1 est de dimension 2. Notons $\mathcal{B}_1$ une base orthonormée de P_1 et $M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_{|P_1})$. D'après le **Lemme 2**, $P_1^\perp$ est stable par u. Comme $\dim(P_1^\perp) \in \{n-2, n-1\}$, par hypothèse de récurrence sur l'endomorphisme normal $u_{P_1^\perp} \in \mathcal{L}(P_1^\perp)$ induit par u par restriction, il existe $p, s \in \mathbb{N}$, $D_p \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R})$, $a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s \in \mathbb{R}$, $b_1, \ldots, b_s \neq 0$, et une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $P_1^\perp$, telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u_{P_1^\perp}) = \begin{pmatrix} D_p & & & (0) \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R_r \end{pmatrix} \quad \text{où } R_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$$

  Comme $E = P_1 \overset{\perp}{\oplus} P_1^\perp$, la famille concaténée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base orthonormée de E et on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} M_1 & & & & (0) \\ & D_p & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_r \end{pmatrix}$$

  Effectuons désormais une disjonction de cas selon si $\dim(P_1) = 1$ ou 2 :
  - Si $\dim(P_1) = 1$, alors $\mathcal{B}_1 = (x)$ où $x \in E$ est un vecteur propre pour u associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais alors, $M_1 = (\lambda)$ et on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & & & & (0) \\ & D_p & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{p+1} & & & (0) \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R_r \end{pmatrix}$$

    ce qui est bien de la forme souhaitée.

  - Si $\dim(P_1) = 2$, alors u n'admet pas de valeur propre réelle donc d'après le **Lemme 3**, il existe $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tels que $b_0 \neq 0$ et

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix} = R_0.$$

    Or, comme u n'admet pas de valeur propre réelle, $p = 0$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R_0 & & & (0) \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R_r \end{pmatrix}$$

    qui est à nouveau de la forme souhaitée. Ceci conclut la récurrence, et achève la preuve du **Théorème 4**.